

Linjärt
beroende/
oberoende

Generalisering

$\vec{u} \parallel \vec{v}$ beroende

~~$\vec{u} \parallel \vec{v}$~~ oberoende

Om $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \dots, \bar{u}_k$
är linjärt beroende
finns a_1, a_2, \dots, a_k
(inte alla noll)

Så att

$$a_1 \bar{u}_1 + a_2 \bar{u}_2 + \dots + a_k \bar{u}_k = 0$$

Eftersom inte alla är

noll kan vi anta att

$a_i \neq 0$ och får

$$\frac{a_1}{a_i} u_1 + \dots + \frac{a_k}{a_i} u_k = 0$$

Flytta över $\frac{a_i}{a_i} u_i$
till andra sidan

och få

$$u_i = - \sum_{j \neq i} \frac{a_j}{a_i} u_j$$

Om $\bar{u} \parallel \bar{v}$ så är

$$\bar{v} = a \cdot \bar{u} \quad \text{eller}$$

$$\bar{u} = a \cdot \bar{v} \quad \text{för något}$$

tal a .

Om $a \neq 0$

$$\bar{v} = a \bar{u} \quad \iff$$

$$\bar{u} = \frac{1}{a} \bar{v}$$

Nollvektorn $\vec{0}$
är parallell med
alla vektorer.

Och om $\vec{u}_j = \vec{0}$

Så är

$\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_k$

linjärt beroende.

Linjärt oberoende

Då finns inte

a_1, a_2, \dots, a_k

alla skilda från noll

så att

$$a_1 \bar{u}_1 + a_2 \bar{u}_2 + \dots + a_k \bar{u}_k = 0$$

○ Olika linjärkomb.
ger olika vektorer.

$$(a_1, \dots, a_n) \neq (b_1, \dots, b_n)$$

\Rightarrow Skalärer

$$a_1 t_1 + \dots + a_n t_n \neq$$

$$b_1 t_1 + \dots + b_n t_n$$

vektorer

Kolla i ett
enkelt fall.
 $\bar{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $u_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$
 ~~$\bar{u}_1 \parallel u_2$~~ alltså
linjärt oberoende.

Om

$$a\bar{u}_1 + b\bar{u}_2 = c\bar{u}_1 + d\bar{u}_2$$

så får vi

$$(a-c)\bar{u}_1 + (b-d)\bar{u}_2 = 0$$

$$\implies a-c=0 \text{ och}$$

$$b-d=0$$

Reducerad trappstegsform

Om vi ska se \mathbb{P}^3

$$\bar{u}_1 = (1, 2, -1, 0)^t$$
$$\bar{u}_2 = (0, 2, 2, 1)^t$$
$$\bar{u}_3 = (3, -1, 2, 1)^t$$

Vi kan kolla om
 de är linjärt beroende
 eller oberoende genom
 Gauss Elimination \vec{p}

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \vec{p} \approx$$

Diagram illustrating the Gauss elimination process on the matrix A . The matrix is written as $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \vec{p} \approx$. Blue circles highlight the pivot elements: -2 in the second row, second column, and 1 in the third row, third column. Blue arrows indicate the row operations: $R_2 \leftarrow R_2 - 2R_1$ and $R_3 \leftarrow R_3 - R_1$.

nov 23-13:24

$$\begin{array}{c}
 \sim \\
 \left(\begin{array}{ccc}
 1 & 0 & 3 \\
 0 & 2 & -7 \\
 0 & 2 & 5 \\
 0 & 1 & 1
 \end{array} \right) \\
 \sim \\
 \left(\begin{array}{ccc}
 1 & 0 & 3 \\
 0 & 1 & 1 \\
 0 & 2 & 5 \\
 0 & 2 & -7
 \end{array} \right)
 \end{array}$$

The image shows two handwritten matrices in row echelon form, connected by a tilde symbol (\sim). The first matrix is:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & -7 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$
 A tilde symbol is to the left of the matrix. A curved arrow points from the second row to the third row, with a tilde symbol to its right.

The second matrix is:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 2 & -7 \end{pmatrix}$$
 A tilde symbol is to the left of the matrix. Two circled numbers, (-2) and (-2) , are written in blue ink to the right of the matrix. A blue curved arrow points from the second row to the third row, and another blue curved arrow points from the second row to the fourth row.

nov 23-13:25

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -9 \end{pmatrix} \left| \begin{array}{l} 1 \\ 3 \end{array} \right. \begin{array}{l} \sim \\ \sim \end{array} \begin{array}{l} (3) \\ (3) \end{array}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \left| \begin{array}{l} -1 \\ -3 \end{array} \right. \begin{array}{l} \sim \\ \sim \end{array} \begin{array}{l} (-1) \\ (-3) \end{array}$$

nov 23-13:27

Vi ser att de
var oberoende.

Frågan var om
det finns a, b, c
inte alla noll så

ett

$$a\bar{u}_1 + b\bar{u}_2 + c\bar{u}_3 = 0$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ d \end{pmatrix}$$

Totalmatrisen är

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & | & 0 \\ 2 & 2 & -1 & | & 0 \\ -1 & 2 & 2 & | & b \\ 0 & 1 & 1 & | & 0 \end{pmatrix}$$

Om det saknas
ledamull eller i
någon kolumn så
finns icke-triviale
lösningar.
Annars inte.

Ta ett fall
då de är linjärt
beroende.

$$\bar{u}_1 = (1, 2, -1, 0)^t$$

$$\bar{u}_2 = (0, 2, 2, 1)^t$$

$$\bar{u}_3 = (3, 4, -5, -1)^t$$

Gör samma sak;

$$\begin{array}{ccc|cc}
 1 & 0 & 3 & (-2) & (1) \\
 2 & 2 & 4 & \swarrow & \\
 -1 & 2 & -5 & \swarrow & \\
 0 & 1 & -1 & & \\
 \hline
 1 & 0 & 3 & & \\
 0 & 2 & -2 & & \\
 0 & 2 & -2 & & \\
 0 & 1 & -1 & & \\
 \hline
 \end{array}$$

The image shows two augmented matrices. The top matrix has a blue circled (-2) in the first row, fourth column and a blue circled (1) in the first row, fifth column. Blue arrows point from these circled elements to the second and third rows of the top matrix. A tilde symbol \sim is to the right. The bottom matrix has a tilde symbol \sim to its left. A curved arrow points from the bottom matrix back to the top matrix, indicating a reverse operation.

nov 23-13:35

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{matrix} (-2) & (-2) \\ \downarrow & \downarrow \\ \downarrow & \downarrow \end{matrix} \sim$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

The image shows a handwritten solution for row-reducing a matrix. The initial matrix is $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$. Blue annotations show the operations: (-2) is circled and an arrow points to the second column of the third row; another (-2) is circled and an arrow points to the second column of the fourth row. A tilde symbol \sim indicates the resulting matrix $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, where the pivot elements 1 and 1 in the second column are circled in red.

nov 23-13:36

Alltså finns
 icke-trivial lösning.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$c = t, \quad b = c = t$$

$$a = -3c = -3t$$

$$\text{dvs } (a, b, c) = t(-3, 1, 1)$$

Alltså

$$-3\bar{u}_1 + \bar{u}_2 + \bar{u}_3 = 0$$

Uppgift 5.14

Parabel genom
tre punkter i
planet

$$y = ax^2 + bx + c$$

a, b, c är koefficienter

Se vilket ekvations-
system vi får;

Det ska stämma
när vi sätter in

$$(x, y) = (x_1, y_1)$$

$$(x, y) = (x_2, y_2)$$

$$\text{eller } (x, y) = (x_3, y_3)$$

Vad säger?

$$\begin{cases} ax_1^2 + bx_1 + c = y_1 \\ ax_2^2 + bx_2 + c = y_2 \\ ax_3^2 + bx_3 + c = y_3 \end{cases}$$

Unik lösning

precis om
 $\det(A) \neq 0$

där

$$A = \begin{pmatrix} x_1^2 & x_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2 & 1 \\ x_3^2 & x_3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det A = (x_1 - x_2)(x_2 - x_3) \cdot (x_1 - x_3)$$

Var för det ?

$$\left| \begin{array}{ccc|cc} x_1^2 & x_1 & 1 & (-) & (+) \\ x_2^2 & x_2 & 1 & \swarrow & \\ x_3^2 & x_3 & 1 & \swarrow & \end{array} \right| =$$

$$= \left| \begin{array}{ccc|c} x_1^2 & x_1 & 1 & \\ x_2^2 - x_1^2 & x_2 - x_1 & 0 & \\ x_3^2 - x_1^2 & x_3 - x_1 & 0 & \end{array} \right| =$$

nov 23-14:02

$$= \begin{vmatrix} x_2^2 - x_1^2 & x_2 - x_1 \\ x_3^2 - x_1^2 & x_3 - x_1 \end{vmatrix}$$

$$= (x_2 - x_1)(x_3 - x_1) \begin{vmatrix} x_2 + x_1 & | \\ x_3 + x_1 & | \end{vmatrix}$$

$$= (x_2 - x_1)(x_3 - x_1) \cdot$$

$$(x_2 + x_1 - (x_3 + x_1))$$

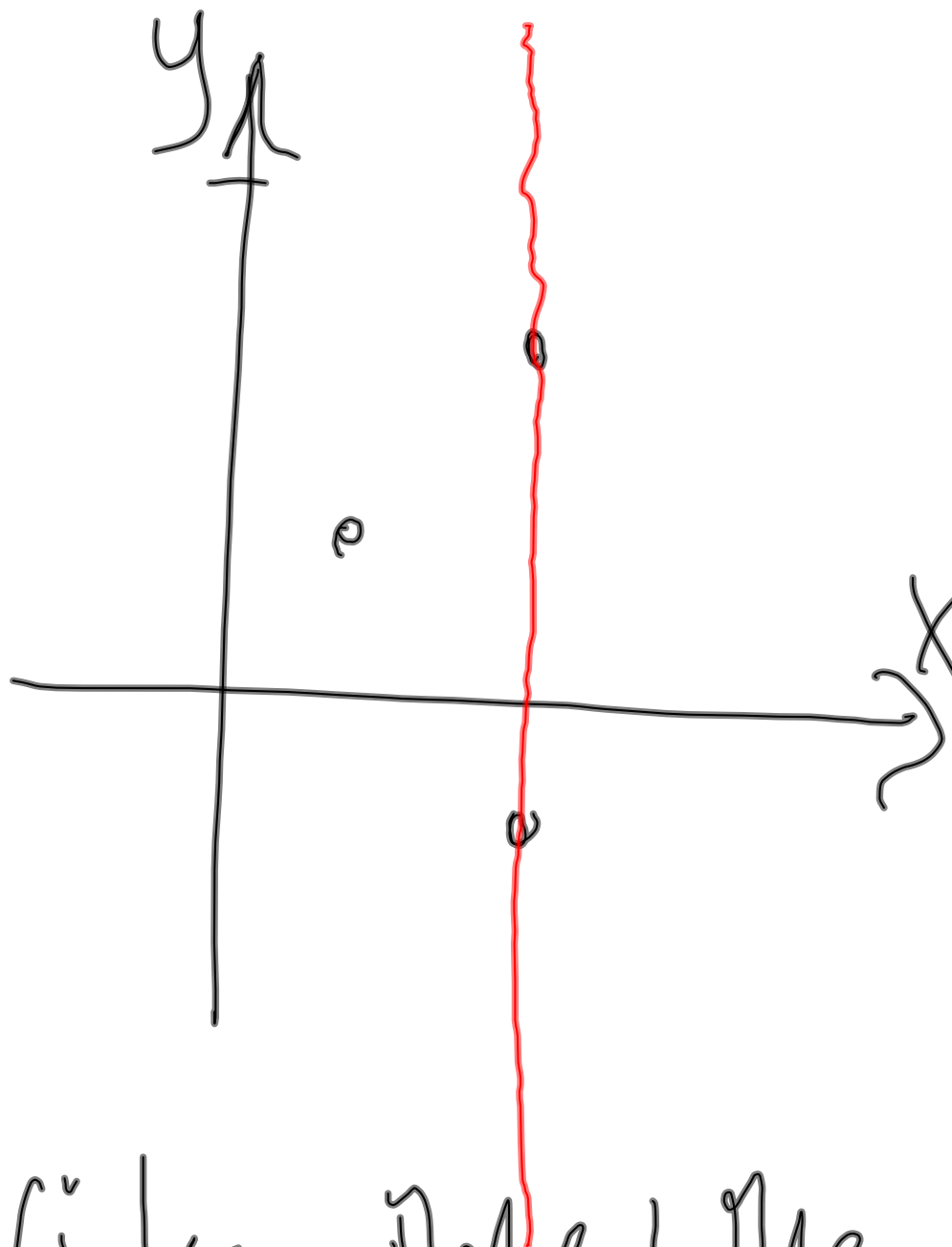
$$= (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)$$

$$(x_2 - x_3)$$

Detta är nol

precis om minst

två x_i är samma.



Vi kan inte hitta
någon parabel genom
punkterna a

$$x_i = x_j, \text{ men } y_i \neq y_j.$$

$$\text{Om } x_i = x_j \text{ och } y_i = y_j, \text{ så är}$$

$$P_i = P_j.$$

Svar:

a) alla x_i olika

b) två av punkterna
samma faller och
den tredje inte
ligger ovanför eller
under.

c) Om $x_i = x_j$ men
 $y_i \neq y_j$.

Crammers regel

Om det finns en
unik lösning till

$$A\bar{x} = \bar{b}$$

da finns formel

Ex

$$\begin{cases} ax + by = e \\ cx + dy = f \end{cases}$$

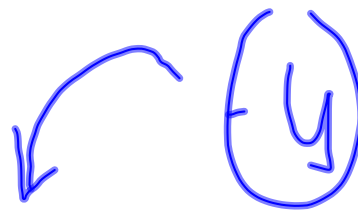
$$\begin{cases} cx + dy = f \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$$

$$X = \frac{\begin{vmatrix} e & b \\ f & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a & e \\ c & f \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}$$

Se på



$$\begin{vmatrix} e & b \\ f & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ax+by & b \\ cx+dy & d \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} ax & b \\ cx & d \end{vmatrix} = x \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

Samme for

$$\begin{vmatrix} a & e \\ c & f \end{vmatrix}$$

Prova att
använda Cramers
regel för att
 hitta parabeln
 $y = ax^2 + bx + c$

Om det finns en
unik

$$A = \begin{pmatrix} x_1^2 & x_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2 & 1 \\ x_3^2 & x_3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det A = (x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_2 - x_3)$$

Räkna ut a med

Cramers regel :

Byt ut första
kolonnen mot höger-
ledet.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} y_1 & x_1 & 1 & \\ y_2 & x_2 & 1 & = y_1 x_2 + \\ y_3 & x_3 & 1 & y_2 x_3 + \\ & & & x_1 y_3 \end{array} \right.$$

$$- x_1 y_2 - x_2 y_3 - x_3 y_1$$

Antic

$$y_1x_2 + y_2x_3 + x_1y_3 - x_1y_2 - x_2y_3 - x_3y_1$$

$$a = \frac{\quad}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_2 - x_3)}$$

På samma sätt

kan vi göra för

b och c.

5.10

Finna de värden

på k så att
 $yx = 2kx + 3kx$

$$y = ax + bx + cx$$

går genom

$(-1, 2), (0, 5), (1, 3)$

för något (a, b, c) .

Vi vill att

kurvan ska genom

punkterna, dvs

$$\begin{cases} a \cdot e^{-k} + b \cdot e^{-2k} + c \cdot e^{-3k} = 2 \\ a \cdot e^0 + b \cdot e^0 + c \cdot e^0 = 5 \\ a \cdot e^k + b \cdot e^{2k} + c \cdot e^{3k} = 3 \end{cases}$$

Först, determinanta
som är skild från
noll precis då det
finns en unik lösning.

$$A = \begin{pmatrix} e^{-k} & e^{-2k} & e^{-3k} \\ 1 & 1 & 1 \\ e^k & e^{2k} & e^{3k} \end{pmatrix}$$

$$\det A = \begin{vmatrix} e^{-k} & e^{-2k} & e^{-3k} \\ 1 & 1 & 1 \\ e^k & e^{2k} & e^{3k} \end{vmatrix}$$

$$= e^k \cdot e^{-k} \begin{vmatrix} 1 & e^{-k} & e^{-2k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & e^k & e^{2k} \end{vmatrix}$$

$$\begin{array}{l}
 \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array} \\
 \left(\begin{array}{ccc|c}
 0 & e^{-h} - 1 & e^{-2h} & -1 \\
 1 & 1 & 1 & 1 \\
 0 & e^h - 1 & e^{2h} & -1 \\
 \hline
 e^{-h} & -1 & e^{-2h} & -1 \\
 e^h & -1 & e^{2h} & -1
 \end{array} \right) \\
 \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array}
 \end{array}$$

A handwritten matrix is shown with a red circle around the element '1' in the second row, first column. A red arrow points from this circle to the first row of the matrix. The matrix is partitioned into two sections by a horizontal line. The top section has three rows, and the bottom section has two rows. The first row of the top section is $0 \quad e^{-h} - 1 \quad e^{-2h} \quad -1$. The second row is $1 \quad 1 \quad 1 \quad 1$. The third row is $0 \quad e^h - 1 \quad e^{2h} \quad -1$. The first row of the bottom section is $e^{-h} \quad -1 \quad e^{-2h} \quad -1$. The second row of the bottom section is $e^h \quad -1 \quad e^{2h} \quad -1$.

nov 23-14:33

$$= -(e^k - 1) \begin{vmatrix} e^{-k} & e^{-2k} \\ 1 & e^k + 1 \end{vmatrix}$$

$$= -(e^k - 1)(e^{-k} - 1) \begin{vmatrix} 1 & e^{-k} + 1 \\ 1 & e^k + 1 \end{vmatrix}$$

$$= -(e^k - 1)(e^{-k} - 1)(e^k - e^{-k})$$

När är detta noll?

Om vi sätter
 $t = e^k$
 för i

$$\begin{aligned} \det A &= -(t-1)\left(\frac{1}{t}-1\right) \cdot \left(t-\frac{1}{t}\right) \\ &= -\frac{1}{t^2}(t-1)(1-t)(t^2-1) \\ &= -\frac{1}{t^2}(t-1)(1-t)(t-1)(t+1) \end{aligned}$$

nov 23-14:40

$$-\frac{1}{t^2}(t-1)(1-t)(t-1)(t+1)$$

Detta är en
 polen om $t = \pm 1$.

polen om $t = \pm 1$.

$$t = e^k$$

$$t = 1 \iff k = 0 + 2\pi i n$$

$$t = -1 \iff k = \pi i + 2\pi i n$$

Om $k=0$ är

$$y = ae^{kx} + be^{2kx} + ce^{3kx}$$

konstant

dvs finns ingen lösning,

Om $k=i\pi$ så är

$$y(-1) = y(1)$$

\Rightarrow ingen lösning.