Linjärt beroende/oberoende

Generalisering

$\bar{u} \parallel \bar{v}$ beroende

$\bar{u} \nparallel \bar{v}$ oberoende

nov 23-12:57

Om $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \ldots, \bar{u}_k$

är linjärt beroende

finns $a_1, a_2, \ldots, a_n$

(inte alla noll)

så att

$$a_1\bar{u}_1 + a_2\bar{u}_2 + \ldots + a_k\bar{u}_k = 0$$

Eftersom inte alla är

noll kan vi anta att

nov 23-12:58

$a_i \neq 0$ och får

$$\frac{a_1}{a_i}\bar{u}_1 + \dots + \frac{a_k}{a_i}\bar{u}_k = 0$$

Flytta över $\frac{a_i}{a_i}\bar{u}_i$ till andra sidan och få

$$\bar{u}_i = -\sum_{j \neq i} \frac{a_j}{a_i}\bar{u}_j$$

nov 23-12:58

Om $\bar{u} \parallel \bar{v}$ så är

$\bar{v} = a \cdot \bar{u}$ eller

$\bar{u} = a \cdot \bar{v}$ för något

tal a.

Om $a \neq 0$

$\bar{v} = a\bar{u} \Longleftrightarrow$

$\bar{u} = \frac{1}{a} \cdot \bar{v}$

nov 23-12:58

Nollvektorn $\bar{0}$ är parallell med alla vektorer.

Och om $\bar{u}_i = \bar{0}$ så är $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \ldots, \bar{u}_k$ linjärt beroende.

nov 23-12:58

Linjärt oberoende

Då finns inte

$a_1, a_2, \ldots a_k$

alla skilda från noll,

så att

$a_1\bar{u}_1 + a_2\bar{u}_2 + \ldots + a_k\bar{u}_k = \bar{0}$

nov 23-12:58

Olika linjärkomb. ger olika vektorer.

$$(a_1, \ldots, a_k) \neq (b_1, \ldots, b_k)$$

skalärer

$$\Longrightarrow$$

$$a_1\bar{u}_1 + \ldots + a_k\bar{u}_k \neq$$

$$b_1\bar{u}_1 + \ldots + b_k\bar{u}_k$$

vektorer

nov 23-12:58

Kolla i ett enkelt fall.

$\bar{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \bar{u}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\bar{u}_1 \nparallel u_2$ alltså linjärt oberoende.

nov 23-13:19

Om

$$a\bar{u}_1 + b\bar{u}_2 = c\bar{u}_1 + d\bar{u}_2$$

så får vi

$$(a-c)\bar{u}_1 + (b-d)\bar{u}_2 = 0$$

$$\Rightarrow a-c=0 \text{ och } b-d=0$$

nov 23-13:20

Reducerad trappstegsform

Om vi ska se på

$\bar{u}_1 = (1, 2, -1, 0)^t$

$\bar{u}_2 = (0, 2, 2, 1)^t$

$\bar{u}_3 = (3, -1, 2, 1)^t$

nov 23-13:22

Vi kan kolla om de är linjärt beroende eller oberoende genom Gausselimination på

$$A = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{cc} -2 & 1 \\ & \\ & \\ & \end{array} \sim$$

nov 23-13:24

$$\sim \begin{pmatrix}1&0&3\\0&2&-7\\0&2&5\\0&1&1\end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix}1&0&3\\0&1&1\\0&2&5\\0&2&-7\end{pmatrix} \begin{matrix}\\ (-2)\ (-2)\\ \\ \\ \end{matrix} \sim$$

nov 23-13:25

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -9 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \left.\frac{1}{3}\right) \sim \quad 3 \\ \\ \end{matrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ -1 \quad -3 \\ \\ \end{matrix}$$

nov 23-13:27

Vi ser att de var oberoende.

Frågan var om det finns a, b, c inte alla noll så att

$$a\bar{u}_1 + b\bar{u}_2 + c\bar{u}_3 = \bar{0}$$

nov 23-13:30

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Totalmatrisen är

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

nov 23-13:31

Om det saknas ledande etta i någon kolonn så finns icke-triviala lösningar.

Annars inte.

nov 23-13:31

Ta ett fall då de är linjärt beroende.

$$\bar{u}_1 = (1, 2, -1, 0)^t$$

$$\bar{u}_2 = (0, 2, 2, 1)^t$$

$$\bar{u}_3 = (3, 4, -5, -1)^t$$

Gör samma sak;

nov 23-13:34

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 4 \\ -1 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad (-2) \quad (1) \quad \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \sim$$

nov 23-13:35

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{matrix} (-2) \; (-2) \end{matrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

nov 23-13:36

Alltså finns icke-trivial lösn.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$c = t$, $b = c = t$

$a = -3c = -3t$

nov 23-13:37

dvs $(a, b, c) = t(-3, 1, 1)$

Alltså

$$-3 \cdot \bar{u}_1 + \bar{u}_2 + \bar{u}_3 = 0$$

nov 23-13:38

Uppgift 5.14

Parabel genom tre punkter i planet

$y = ax^2 + bx + c$

a, b, c är koefficienter

nov 23-13:41

Se vilket ekvations system vi får;

Det ska stämma när vi sätter in

$(x,y)=(x_1,y_1)$

$(x,y)=(x_2,y_2)$

och $(x,y)=(x_3,y_3)$

nov 23-13:42

Vad stämmer?

$$\begin{cases} ax_1^2 + bx_1 + c = y_1 \\ ax_2^2 + bx_2 + c = y_2 \\ ax_3^2 + bx_3 + c = y_3 \end{cases}$$

Unik lösning precis om

$\det(A) \neq 0$

nov 23-13:44

där

$$A = \begin{pmatrix} x_1^2 & x_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2 & 1 \\ x_3^2 & x_3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det A = (x_1 - x_2)(x_2 - x_3) \cdot (x_1 - x_3)$$

nov 23-13:45

Varför det?

$$\begin{vmatrix} x_1^2 & x_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2 & 1 \\ x_3^2 & x_3 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} -1 & -1 \end{matrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} x_1^2 & x_1 & 1 \\ x_2^2 - x_1^2 & x_2 - x_1 & 0 \\ x_3^2 - x_1^2 & x_3 - x_1 & 0 \end{vmatrix} =$$

nov 23-14:02

$$= \begin{vmatrix} x_2^2 - x_1^2 & x_2 - x_1 \\ x_3^2 - x_1^2 & x_3 - x_1 \end{vmatrix}$$

$$= (x_2 - x_1)(x_3 - x_1) \begin{vmatrix} x_2 + x_1 & 1 \\ x_3 + x_1 & 1 \end{vmatrix}$$

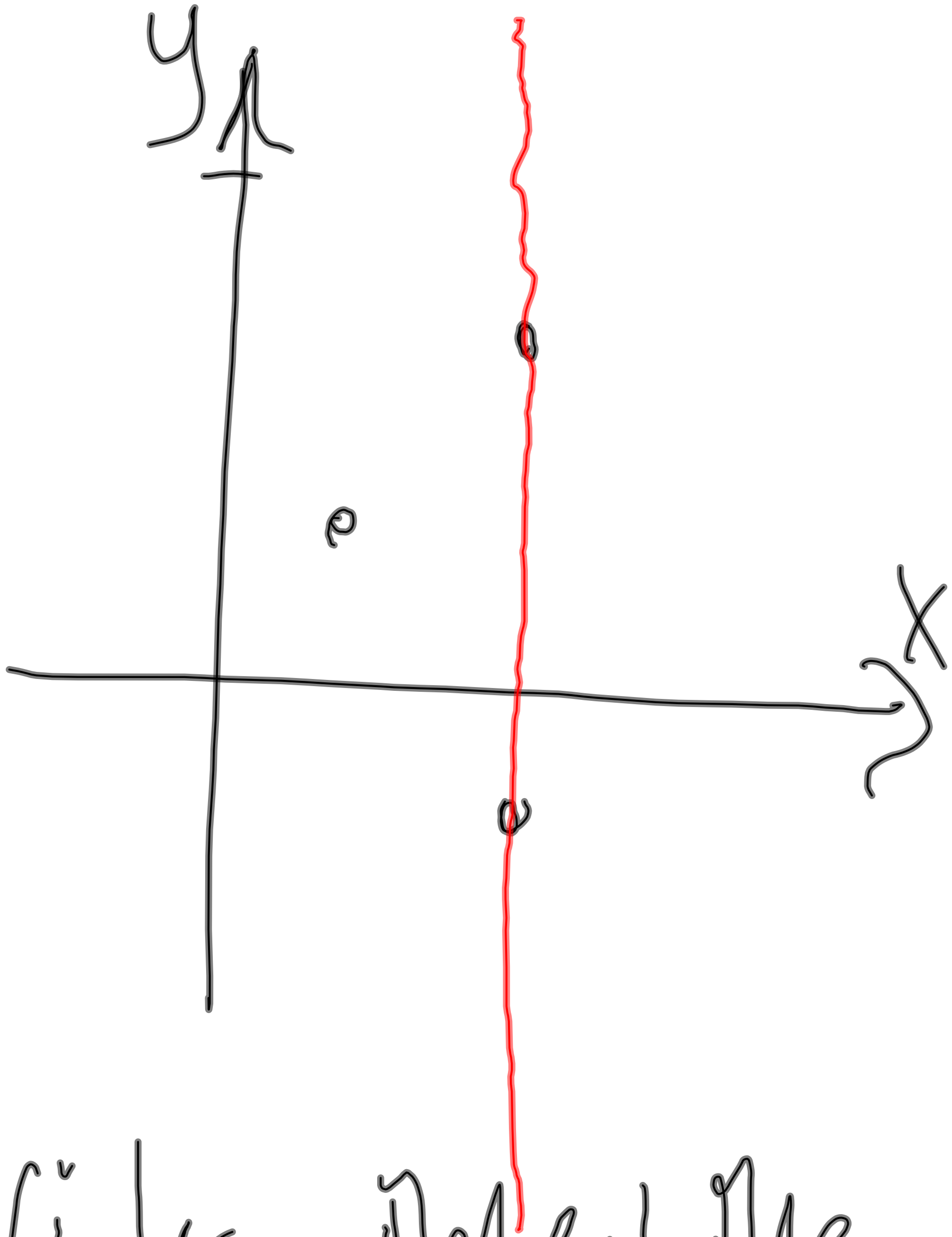
$$= (x_2 - x_1)(x_3 - x_1) \cdot \left(x_2 + x_1 - (x_3 + x_1) \right) =$$

nov 23-14:05

$$= (x_2 - x_1)(x_3 - x_1) \cdot (x_2 - x_3)$$

Detta är noll precis om minst två x_i är samma.

nov 23-14:07



Vi kan inte hitta
någon parallel genom
punkterna a

nov 23-14:08

$x_i = x_j$, men $y_i \neq y_j$.

Om $x_i = x_j$ och $y_i = y_j$, så är

$P_i = P_j$.

nov 23-14:09

Svar:

a) alla x_i olika

b) två av punkterna sammanfaller och den tredje inte ligger ovanför eller under.

c) Om $x_i = x_j$ men $y_i \neq y_j$.

nov 23-14:11

Cramers regel

Om det finns en unik lösning till

$$A\bar{x} = \bar{b}$$

då finns formel

nov 23-14:13

Ex

$$\begin{cases} ax + by = e \\ cx + dy = f \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad \bar{b} = \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$$

nov 23-14:14

$$x = \frac{\begin{vmatrix} e & b \\ f & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a & e \\ c & f \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}$$

nov 23-14:15

Se på y

$$\begin{vmatrix} e & b \\ f & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ax+by & b \\ cx+dy & d \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} ax & b \\ cx & d \end{vmatrix} = x \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

Samma för $\begin{vmatrix} a & e \\ c & f \end{vmatrix}$

nov 23-14:16

Prova att använda Cramers regel för att hitta parabeln

$$y = ax^2 + bx + c$$

om det finns en unik

nov 23-14:19

$$A = \begin{pmatrix} x_1^2 & x_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2 & 1 \\ x_3^2 & x_3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det A = (x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_2 - x_3)$$

Räkna ut a med

Cramers regel:

nov 23-14:20

Byt ut första kolumnen mot högerledet.

$$\begin{vmatrix} y_1 & x_1 & 1 \\ y_2 & x_2 & 1 \\ y_3 & x_3 & 1 \end{vmatrix} = y_1x_2 + y_2x_3 + x_1y_3 - x_1y_2 - x_2y_3 - x_3y_1$$

nov 23-14:21

Alltså

$$a = \frac{y_1x_2 + y_2x_3 + x_1y_3 - x_1y_2 - x_2y_3 - \cdots}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_2 - x_3)}$$

På samma sätt

kan vi göra för

b och c.

5.10

Finn de värden på k då

$y = ae^{kx} + be^{2kx} + ce^{3kx}$

går genom $(-1,2), (0,5), (1,3)$ för något (a,b,c).

nov 23-14:25

Vi vill att kurvan ska genom punkterna, dvs

$$\begin{cases} a\cdot e^{-k} + b\cdot e^{-2k} + c\cdot e^{-3k} = 2 \\ a\cdot e^{0} + b\cdot e^{0} + c\cdot e^{0} = 5 \\ a\cdot e^{k} + b e^{2k} + c e^{3k} = 3 \end{cases}$$

nov 23-14:27

Först, determinanten som är skild från noll precis då det finns en unik lösn.

$$A=\begin{pmatrix} e^{-h} & e^{-2h} & e^{-3h} \\ 1 & 1 & 1 \\ e^{h} & e^{2h} & e^{3h} \end{pmatrix}$$

nov 23-14:29

$$\det A = \begin{vmatrix} e^{-h} & e^{-2h} & e^{-3h} \\ 1 & 1 & 1 \\ e^{h} & e^{2h} & e^{3h} \end{vmatrix}$$

$$= e^{h} \cdot e^{-h} \begin{vmatrix} 1 & e^{-h} & e^{-2h} \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & e^{h} & e^{2h} \end{vmatrix} \; (-1) =$$

nov 23-14:31

$$
= \begin{vmatrix} 0 & e^{-h}-1 & e^{-2h}-1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & e^{h}-1 & e^{2h}-1 \end{vmatrix}
$$

$$
= - \begin{vmatrix} e^{-h}-1 & e^{-2h}-1 \\ e^{h}-1 & e^{2h}-1 \end{vmatrix}
$$

nov 23-14:33

$$= -(e^{k}-1)\begin{vmatrix} e^{-k}-1 & e^{-2k}-1 \\ 1 & e^{k}+1 \end{vmatrix}$$

$$= -(e^{k}-1)(e^{-k}-1)\begin{vmatrix} 1 & e^{-k}+1 \\ 1 & e^{k}+1 \end{vmatrix}$$

$$= -(e^{k}-1)(e^{-k}-1)(e^{k}-e^{-k})$$

När är detta noll?

nov 23-14:37

Om vi sätter

$$t = e^{k}$$

får vi

$$\det A = -(t-1)\left(\frac{1}{t}-1\right) \cdot \left(t - \frac{1}{t}\right)$$

$$= -\frac{1}{t^2}(t-1)(1-t)(t^2-1)$$

$$= -\frac{1}{t^2}(t-1)(1-t)(t-1)(t+1)$$

nov 23-14:40

$$-\frac{1}{t^2}(t-1)(1-t)(t-1)(t+1)$$

Detta är noll

precis om $t = \pm 1$.

$$t = e^k$$

$$t = 1 \Longleftrightarrow k = 0 + 2\pi i n$$

$$t = -1 \Longleftrightarrow k = \pi i + 2\pi i n$$

nov 23-14:42

Om $k=0$ är

$y = ae^{kx} + be^{2kx} + ce^{3kx}$

konstant

dvs finns ingen lösning.

Om $k = i\pi$ så är

$y(-1) = y(1)$

$\Rightarrow$ ingen lösning.

nov 23-14:45